Existence globale de solutions d'énergie infinie de l'équation de Navier-Stokes 2D

Pierre Germain
Centre de Mathématiques Laurent Schwartz, Ecole Polytechnique
U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
91128 Palaiseau Cedex

Résumé

Nous étudions dans cet article les solutions des équations de Navier-Stokes en deux dimensions, avec donnée initiale dans ∂BMO. Pour $u_{|t=0}$ dans l'adhérence de la classe de Schwartz, nous obtenons l'existence et l'unicité d'une solution globale, et une estimation sur sa norme dans ∂BMO.

Abstract

We study in this article the solutions of the Navier-Stokes equations, with an initial data in ∂BMO. For $u_{|t=0}$ in the closure of the Schwartz class, we obtain the existence and uniqueness of a global solution, and an estimate on its norm in ∂BMO.

1 Introduction

1.1 Les équations de Navier-Stokes

Nous nous intéresserons dans cet article aux solutions globales du problème de Cauchy associé aux équations de Navier Stokes, qui décrivent le mouvement d'un fluide visqueux dans l'espace tout entier. Ce mouvement est décrit par les variables $u(x,t)$ et $p(x,t)$ qui donnent, en un point x de l'espace et au temps t, respectivement la vitesse et la pression du fluide. Nous considérons le cas d'un fluide incompressible (ce qui entraîne la condition $\operatorname{div} u = 0$), et de viscosité $\nu = 1$. Les équations de Navier-Stokes prennent alors la forme suivante :

$$(NS) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{array} \right.$$

Nous considérerons aussi brièvement le cas où une force extérieure dérivant d'un potentiel V est appliquée. Le système devient alors :

$$(NSF) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \nabla V \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \ . \end{array} \right.$$

Sauf mention contraire, nous nous placerons toujours **en deux dimensions d'espace**.

1.2 Solutions de Leray

La théorie des équations de Navier-Stokes a été initiée par Jean Leray ; il s'est intéressé aux solutions d'énergie finie de (NS) issues de $u_0 \in L^2$.
L'espace L^2 est l'espace d'énergie pour les conditions initiales ; l'espace d'énergie associé aux solutions de l'équation de Navier-Stokes est défini par :

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{déf}}{=} L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1) ,$$

où $\dot{H}^1$ est l'espace de Sobolev homogène, soit l'ensemble des fonctions f pour lesquelles

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \, < \, \infty \, .$$

La norme de $\mathcal{L}$ s'écrit :

$$\|v\|_{\mathcal{L}} = \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2)} + \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1)}.$$

Les solutions de (NS) appartenant à cet espace sont appelées solutions de Leray. Le théorème suivant garantit leur existence et leur unicité.

Théorème 1 (J. Leray [13]) *Soit $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^2)$. Il existe une unique solution globale $v \in \mathcal{L}$ de (NS) ayant v_0 pour condition initiale.*

1.3 Equation intégrale, équation projetée

La formulation intégrale des équations de Navier-Stokes (NS) s'écrit :

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{t\Delta} u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes u(s)) ds \\ &= e^{t\Delta} u_0 - B(u,u) \ , \end{aligned} \tag{1}$$

où l'on note $\mathbb{P}$ le projecteur de Leray sur les champs de vecteur à divergence nulle, et B l'opérateur bilinéaire

$$B(u,v) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot (u(s) \otimes v(s)) ds \ .$$

On peut montrer que le noyau de $\nabla^k e^{t\Delta} \mathbb{P} \nabla \cdot$ s'écrit :

$$t^{-\frac{3+k}{2}} G_k\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right)$$

avec $G_k \in L^1 \cap L^\infty$. On notera pour plus de simplicité indifféremment G pour tous les G_k. De même, nous considérerons dans ce qui suit pour alléger les écritures que B opère sur des fonctions réelles. Ceci nous conduit aux notations suivantes [3] :

$$\begin{aligned} B(u,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^{3/2}} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (u(s)v(s)) ds \\ \nabla B(u,v) &= \int_0^t \frac{1}{(t-s)^2} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (u(s)v(s)) ds \end{aligned}$$

Suivant un abus de langage habituel, nous appellerons dans cet article "solutions de (NS)" des **solutions de l'équation intégrale** (1) (solutions "*mild*"). Les solutions de (1) ne sont pas a priori des solutions du système (NS) présenté en tête de cet article, voir [12] pour une discussion à ce sujet. Par contre, pour ce qui est des solutions que nous considérerons, l'équation intégrale est équivalente à l'équation projetée :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) = 0 \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u_{|t=0} = u_0 \end{cases}$$

Cette équation sera considérée au sens des distributions. Notons que l'on peut (au moins formellement) revenir à (NS) en calculant la pression grâce à la formule

$$-\Delta p = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) \ .$$

1.4 Espaces critiques pour les conditions initiales

La définition des espaces critiques repose sur les propriétés d'invariance par dilatation et translation des solutions de (NS). Soyons plus explicites : soit u une solution de (NS) associée à la condition initiale u_0. Alors, si $\lambda > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^2$, $\lambda u(\lambda(x - x_0), \lambda^2 t)$ sera associée à $\lambda u_0(\lambda(x - x_0))$. Un espace de Banach $X \hookrightarrow \mathcal{S}'$ sera dit critique (sous-entendu : pour les conditions initiales de (NS)) si sa norme vérifie :

$$\forall \lambda > 0 \, , \, \forall x_0 \in \mathbb{R}^2 \ \ \|u\|_X = \lambda \|u(\lambda(\cdot - x_0))\|_X \ . \tag{2}$$

On voit facilement que, en dimension deux d'espace, L^2, les espaces de Besov $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ (avec $1 \leq p, q \leq \infty$) et ∂BMO sont des espaces critiques (se reporter à la troisième partie pour une définition de ces espaces).

Il est intéressant de noter ([6]) que tout espace critique X vérifie :

$$X \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \, .$$

D'autre part ([6], [11]), on a la chaîne d'inclusions suivante :

$$L^2 \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q} \hookrightarrow \dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,\infty} \hookrightarrow \partial BMO \hookrightarrow \dot{B}^{-1}_{\infty,\infty} \tag{3}$$

où $p, q \in [2, \infty[$.

En dimension d'espace quelconque, des théorèmes garantissent l'existence d'une solution locale $u^\star$ pour (NS) si u_0 est de norme grande dans un espace critique X : voir [5] pour $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$ et [6], [11] pour ∂BMO.
En dimension 2 d'espace, nous avons vu que l'espace d'énergie L^2 est lui-même un espace critique. En utilisant cette propriété, I. Gallagher et F. Planchon [8] ont pu montrer que, pour une donnée initiale grande dans $\dot{B}^{\frac{2}{p}-1}_{p,q}$, la solution locale en temps $u^\star$ se prolonge à $\mathbb{R}^+$, et obtenir ainsi une solution globale en temps. Nous nous proposons d'appliquer la même méthode à ∂BMO.

Mais avant de nous intéresser à (NS) avec $u_0 \in \partial BMO$, deux remarques doivent être faites sur cet espace :

- Un problème posé par ∂BMO est que $\partial BMO \neq \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$ (l'adhérence de la classe de Schwartz dans ∂BMO) ; on retrouve ce problème pour les espaces de Besov d'indice q infini. Nous nous restreindrons donc souvent dans ce qui suit à $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$.

- Signalons d'autre part que ∂BMO est, en un certain sens, l'espace optimal pour la résolution de (NS). En effet, ∂BMO est le plus gros espace critique X, dans la chaîne d'inclusions précédente (qui se généralise à $\mathbb{R}^n$), pour lequel on sait démontrer un résultat d'existence de solutions de (NS) dans $\mathbb{R}^n$ avec $u_0 \in X$ petit. En fait, on peut formaliser et fonder cette observation, et donner un sens précis à l'idée que ∂BMO est optimal : voir [1].

1.5 Solutions de Koch et Tataru

H. Koch et D. Tataru ont, dans [11], obtenu l'existence de solutions globales de (NS), en toute dimension, pour une donnée initiale petite dans ∂BMO. Avant d'énoncer ce résultat plus précisément, il nous faut introduire les espaces X_T, $0 < T \leq \infty$; X_T est l'ensemble des fonctions w pour lesquelles la norme suivante est bien définie et finie :

$$\begin{aligned}\|w\|_{X_T} &\overset{\text{déf}}{=} \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty + \sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty \\ &+ \sup_{0<R<\sqrt{T}} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} \mid w(y,t) \mid^2 dy\, dt\right)^{1/2} ,\end{aligned}$$

où l'on note pour la moyenne de f sur la boule $B(x,R)$: $\displaystyle\fint_{B(x,R)} f = \frac{1}{|B(x,R)|}\int_{B(x,R)} f$.
Nous verrons dans la troisième partie que le troisième terme de cette norme est adapté à des données initiales dans ∂BMO puisqu'il est fini si $w = e^{t\Delta}w_0$ avec $w_0 \in \partial BMO$.

Les démonstrations des résultats suivants peuvent être trouvées dans [11] et [6].

Théorème 2 (H. Koch, D. Tataru, [11]) *Soit $d \geq 2$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, si $w_0 \in \partial BMO(\mathbb{R}^d)$ est de divergence nulle et $\|w_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$, il existe w une solution globale de (NS) vérifiant l'inégalité suivante :*

$$\|w\|_{X_\infty} \leq C\|w_0\|_{\partial BMO} , \tag{4}$$

pour une constante C. De plus, si $w_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, alors

$$\|w\|_{X_t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 .$$

Idée de la preuve : On considère l'équation intégrale (1), à laquelle on applique le théorème de point fixe 6, en se plaçant dans l'espace X_∞, défini ci-dessus. On s'assure donc des points suivants :

- $\|e^{t\Delta}w_0\|_{X_\infty} \leq \|w_0\|_{\partial BMO}$

- $B\ : X_\infty \times X_\infty \to X_\infty$ est bicontinue ; ceci est garanti par la proposition suivante :

Proposition 1.1 ([11]) *Il existe $\eta > 0$ tel que, $\forall T \in]0, \infty]$,*

$$\|B(u,v)\|_{X_T} \leq \eta \|u\|_{X_T} \|v\|_{X_T} . \tag{5}$$

On dispose aussi de l'estimation, si $0 < t < T$, et pour une constante $C > 0$:

$$\|B(u,v)(t)\|_{\partial BMO} \leq C \|u\|_{X_T} \|v\|_{X_T} . \tag{6}$$

On peut donc appliquer le théorème 6, et le théorème 2 en découle. ■
Le théorème précédent s'adapte facilement pour fournir l'existence de solutions locales à données grandes ; cependant on doit se restreindre à des données dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, pour pouvoir garantir que $\|e^{t\Delta} w_0\|_{X_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$ et appliquer le théorème de point fixe 6 énoncé en annexe. On obtient alors :

Théorème 3 *Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}(\mathbb{R}^d)$ de divergence nulle. Il existe $T^\star > 0$ et $u \in X_{T^\star}$ une solution de (NS) sur $[0, T^\star]$ issue de u_0. De plus, $\|u\|_{X_t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.*

Une question naturelle est maintenant celle de l'unicité des solutions de Koch et Tataru. Soit $\mathcal{E}_T$ l'espace

$$\mathcal{E}_T \overset{\text{déf}}{=} \left\{ f \in L^\infty_{\text{loc}}(]0,T], L^\infty) \ , \ \lim_{\delta\to 0} \|f\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta} \right\} . \tag{7}$$

Proposition 1.2 ([6]) *Deux solutions de (NS) appartenant à l'espace $\mathcal{E}_T$ pour un $T > 0$ et issues d'un même $u_0 \in \partial BMO$ sont égales.*

2 Etude de (NS) et (NSF) pour $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$

2.1 Résultat principal

Nous nous proposons dans le présent article d'étendre à des données grandes dans ∂BMO, et en deux dimensions, le résultat d'existence globale (en temps) obtenu par H. Koch et D. Tataru pour des données petites dans ∂BMO.
Il nous faut ici faire mention de [10]. Les auteurs prouvent dans cet article par des méthodes d'analyse harmonique l'existence, pour $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$, d'une solution globale de (NS) dans $L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty[, L^\infty)$. Or le théorème 3 donne pour une condition initiale dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$ l'existence locale d'une solution de (NS) de norme L^∞ finie pour $t > 0$. Ces deux éléments permettent de déduire, pour $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, l'existence d'une solution globale de (NS).
Cependant, on a oublié ce faisant le cadre ∂BMO. La méthode que nous présentons ici, outre qu'elle prouve l'existence d'une solution globale, permet aussi de montrer que cette solution est dans $L^\infty_{\text{loc}}([0,\infty[, \partial BMO)$, et donne une estimation sur sa norme dans ∂BMO.

Avant d'énoncer le théorème, il nous faut définir l'espace dans lequel l'unicité sera prouvée ; nous aurons besoin de la norme de type Carleson suivante (cette norme intervient déjà dans la définition de X_T) :

$$\|u\|_{\mathcal{C},T} = \sup_{0<R<\sqrt{T}} \sup_{x\in\mathbb{R}^2} \left(\int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |u(y,t)|^2 dy\, dt \right)^{1/2} .$$

Nous pouvons maintenant définir l'espace d'unicité

$$
u \in \mathcal{E} \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (i)\ \|u\|_{\mathcal{C},T} < \infty\ \forall T \\ (ii)\ \forall T \in \mathbb{R}^+, \exists \epsilon > 0 \text{ tel que } u \in L^\infty_{loc}(]T, T+\epsilon[, L^\infty) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{et } \lim_{\delta \to 0} \|u(T+\cdot)\|_{X_\delta} < \frac{1}{2\eta} \end{cases} \tag{8}
$$

où η est la constante strictement positive intervenant dans la proposition 1.1 et dans la définition de $\mathcal{E}_T$. La condition (i) va nous permettre de garantir, si en outre u est solution de (NS), que u est faiblement continue. Quant à (ii), elle signifie que pour tout $\tau \in \mathbb{R}^+$, $u(\tau + .)$ appartient à $\mathcal{E}_\epsilon$ (défini en (7)) pour un certain $\epsilon > 0$.

Remarque 2.1 *Notons que la classe d'unicité qui vient d'être définie englobe des résultats déjà connus sur (NS) en deux dimensions, avec u_0 dans ∂BMO ou un sous-espace de ∂BMO.*

- *On vérifie aisément que notre classe d'unicité comprend les solutions $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, L^\infty)$ construites dans [10], car ces dernières sont localement bornées dans L^∞.*

- *Elle comprend aussi les solutions de Koch et Tataru (théorèmes 2 et 3) : si u est l'une de ces solutions, elle vérifie clairement (i). Elle vérifie d'autre part (ii) en $\tau = 0$; en $\tau > 0$ aussi car u est bornée dans L^∞ sur $[\delta, T[$ pour tout $\delta > 0$, si l'on note T le temps d'existence de la solution.*

- *Elle comprend enfin les solutions uniques dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}})$, avec $q < \infty$ construites dans [8].*

  [En effet, soit u une solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}})$. L'hypothèse $q < \infty$ implique que u est à valeurs dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$. On se place maintenant au temps $\tau \geq 0$, puis on résoud l'équation par point fixe, pour T assez petit, dans $X_T \cap \tilde{L}^r([0,T], \dot{B}_{p,q}^{-1+\frac{2}{p}+\frac{2}{r}})$ (voir [9]), et on conclut par unicité de la solution d'un problème de point fixe que $u(\tau + \cdot)$ appartient pour T assez petit à X_T. Ceci implique que (ii) est vérifiée, et que (i) l'est aussi pour T proche de 0.

  D'autre part, u s'écrit (se reporter à [8]) $u = v + w$, avec w bornée dans L^∞ et v localement d'énergie finie pour $t > 0$, donc (i) est vérifiée pour tout T.]

Il est temps d'énoncer notre théorème principal.

Théorème 4 *Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}(\mathbb{R}^2)$ de divergence nulle. Il existe une solution globale de (NS), u, à valeurs dans ∂BMO issue de u_0. Cette solution vérifie pour tout $\delta > 0$ et pour une constante $C(\delta)$ dépendant de u_0 et de δ :*

$$
\forall t > 0 \quad \|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^\delta)\,.
$$

De plus, cette solution prolonge la solution de Koch et Tataru (théorème 3), définie seulement localement, et est unique dans la classe $\mathcal{E}$.

La preuve de ce théorème est l'objet des sections 2.2 et 2.3.

Remarque 2.2 *En fait, nous prouvons dans ce qui suit que u peut s'écrire $u = v + w$, avec $\sup_{t>0} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty$ borné, $\sqrt{t}\|v(t)\|_{\dot{H}^1}$ borné près de 0, et $v \in L^2_{loc}\dot{H}^1$ en dehors de 0. Les inclusions classiques $L^\infty \hookrightarrow BMO$ et $\dot{H}^1 \hookrightarrow BMO$ impliquent que u appartient à l'espace*

$$L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, \partial BMO) \cap L^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, BMO) .$$

Cet espace présente une analogie claire avec

$$L^\infty(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2(\mathbb{R}^+, \dot{H}^1) ,$$

qui est l'espace d'énergie $\mathcal{L}$ défini plus haut.

2.2 Construction de la solution

Cette section est consacrée à la construction de la solution qui fait l'objet du théorème 4 ; il s'agit donc de la preuve de la partie "existence" du théorème 4.

Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$. Nous procédons de la manière suivante :

1. u_0 s'écrit comme somme d'une partie grande et régulière v_0, et d'une partie petite et moins régulière w_0. Le théorème de Koch et Tataru donne l'existence d'une solution w de (NS) issue de w_0 ; on se ramène ainsi à une équation (faisant intervenir w) d'inconnue v, et de donnée initiale v_0.

2. L'utilisation d'un théorème de point fixe permet alors d'obtenir une solution v appartenant à X_T et locale en temps.

3. Par un argument de propagation de régularité, on montre qu'il existe un temps strictement positif pour lequel $v \in L^2$.

4. Une estimation d'énergie a priori permet de rendre v globale en temps.

C'est la méthode utilisée par I. Gallagher et F. Planchon dans [8] pour des données initiales dans des espaces de Besov. Cette idée a été utilisée pour la première fois dans le cadre des équations de Navier-Stokes par Calderón [2].

Comme nous l'avons vu, la première étape de la démonstration consiste à découper la donnée initiale. Soit donc $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$ de divergence nulle. Par définition de cet espace, il existe v_0 et w_0, tous deux de divergence nulle, et tels que :

- $u_0 = v_0 + w_0$
- $v_0 \in \mathcal{S}$
- $w_0 \in \partial BMO$, et $\|w_0\|_{\partial BMO} \leq \epsilon$ (ϵ pourra être fixé ultérieurement. On le prendra assez petit pour que tous les théorèmes dont nous aurons besoin s'appliquent).

Par le théorème 2, il existe w une solution de (NS) issue de w_0. De plus, w vérifie les estimations (4). Si u vérifie l'équation (1), on voit aisément que v est solution de :

$$v(t) = e^{t\Delta}v_0 - B(v, w)(t) - B(w, v)(t) - B(v, v)(t) \tag{9}$$

Nous avons maintenant besoin de la définition suivante : soit Y_T l'espace défini par :

$$\|f\|_{Y_T} \stackrel{\text{déf}}{=} \|f\|_{L^\infty([0,T],L^2)} + \sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla f(t)\|_{L^2} \, .$$

La proposition suivante va nous donner l'existence d'une solution locale dans $X_T \cap Y_T$.

Proposition 2.3 *Il existe $T > 0$ tel que (9) admette une solution v sur $[0,T]$ appartenant à $X_T \cap Y_T$.*

Preuve de la proposition : Nous commençons par construire une solution dans X_T ; nous montrerons ensuite que cette solution appartient aussi à Y_T. Il s'agit dans un premier temps de pouvoir appliquer le théorème de point fixe 6 (voir l'annexe) à la résolution dans X_T de (9), c'est à dire de s'assurer qu'il existe un T tel que le théorème s'applique. Il nous faut vérifier les points suivants :

- $\|e^{t\Delta}v_0\|_{X_T} \underset{T\to 0}{\longrightarrow} 0$; c'est le cas pour $v_0 \in \mathcal{S}$.
- $B \ : X_T \times X_T \to X_T$ est bicontinue ; c'est vrai d'après (5).
- $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(X_T)}$ et $\|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(X_T)}$ sont finies et leur somme est strictement inférieure à 1 ; c'est le cas si $\|w\|_{X_T}$ est assez petit, du fait de (5).

Nous obtenons ainsi $T > 0$ et v solution de (9) sur $[0,T]$. Nous allons maintenant montrer que v appartient aussi à Y_T, en appliquant le lemme de propagation de régularité 5.1 (avec, pour reprendre les notations du lemme, $X = X_T$ et $Y = Y_T$) à l'équation (9). Il nous faut nous assurer des points suivants :

- $e^{t\Delta}v_0 \in Y_T$; ceci est vérifié dès que $v_0 \in \mathcal{S}$. C'est ici que cette hypothèse intervient.
- $B \ : X_T \times Y_T \to Y_T$ et $B : Y_T \times X_T \to Y_T$ sont bicontinues ; c'est l'objet de la proposition suivante, dont nous renvoyons la démonstration à la fin de cette section.

Proposition 2.4 *L'application B est bicontinue de $X_T \times Y_T \to Y_T$.*

- $B(w,\cdot) \ : Y_T \to Y_T$ et $B(\cdot,w) \ : Y_T \to Y_T$ sont continues et la somme de leurs normes est strictement inférieure à 1. Ceci découle aussi de la proposition 2.4 : $B \ : X_T \times Y_T \to Y_T$ est bicontinue, donc $B(w,\cdot)$ et $B(\cdot,w)$ sont dans $\mathcal{L}(Y_T)$, et $\|B(w,\cdot)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} + \|B(\cdot,w)\|_{\mathcal{L}(Y_T)} < 1$ si $\|w\|_{X_T}$ est assez petite.

Nous disposons maintenant de v solution de (NS) sur $[0,T]$, appartenant à $X_T \cap Y_T$. ■

En particulier, il existe $\tau > 0$ tel que $v(\tau) \in L^2$ (Parler de $v(\tau)$ a un sens, en effet, nous verrons dans la suite que v est faiblement continue). Il nous faut maintenant étendre à $\mathbb{R}^+$ notre solution définie pour l'instant localement. C'est l'objet de la proposition suivante, qui porte sur une estimation d'énergie a priori.

Proposition 2.5 *Soit $v_\tau \in L^2$, et w comme ci-dessus. On considère v solution de*

$$(10) \qquad \begin{cases} \partial_t v - \Delta v + \mathbb{P}(v\cdot\nabla v + w\cdot\nabla v + v\cdot\nabla w) = 0 \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v_{|t=\tau} = v_\tau \end{cases}$$

On dispose alors de l'estimation a priori suivante sur la norme de v

$$\|v(t)\|_{L^\infty([\tau,t],L^2)\,\cap\,L^2([\tau,t],\dot H^1)} \leq C\left(\frac{t}{\tau}\right)^{C\epsilon}\|v_\tau\|_{L^2}\ . \tag{11}$$

Preuve de la proposition :
Dans la première des trois équations de (10) on prend le produit scalaire (spatial) avec v puis on intègre (en temps) et on obtient, en utilisant $\operatorname{div} v = \operatorname{div} w = 0$:

$$\|v(t)\|_2^2 + 2\int_\tau^t \|\nabla v(s)\|_2^2 ds + \int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^2}(v\cdot\nabla)vw\,dx\,ds = \|v_\tau\|_2^2\,. \tag{12}$$

(Si $p\in[1,\infty]$, on note $\|\cdot\|_p$ pour la norme de l'espace de Lebesgue L^p). L'inégalité de Hölder et le fait que $\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty \leq C\epsilon$ permettent d'écrire :

$$\begin{aligned}\left|\int_\tau^t\int_{\mathbb{R}^2}(v\cdot\nabla)vw\,dx\,ds\right| &\leq \int_\tau^t \|v(s)\|_2\|\nabla v(s)\|_2\|w(s)\|_\infty ds\\ &\leq C\epsilon\left(\int_\tau^t\|\nabla v(s)\|_2^2 ds + \int_\tau^t\frac{\|v(s)\|_2^2}{s}ds\right)\end{aligned}$$

En reportant dans (12), on obtient :

$$\|v(t)\|_2^2 + (2-C\epsilon)\int_\tau^t\|\nabla v\|_2^2 \quad\leq\quad \|v_\tau\|_2^2 + C\epsilon\int_\tau^t\frac{\|v(s)\|_2^2}{s}ds\,,$$

et le lemme de Gronwall permet d'obtenir le résultat souhaité. ■

On peut maintenant appliquer le schéma standard : régularisation de l'équation (NS) sur $[\tau,+\infty[$, puis passage à la limite faible en utilisant l'estimation précédente. On en déduit que v se prolonge à $\mathbb{R}^+$ en une solution de (NS) vérifiant (11). En posant $u=v+w$, on obtient une solution globale de (NS) issue de u_0. Comme $L^2\hookrightarrow \partial BMO$, et du fait des inégalités (11) et (6), on dispose de plus de l'estimation suivante :

$$\|v(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1+t^\delta)\ ,$$

pour tout $\delta>0$, où l'on a écrit $C(\delta)$ pour une constante dépendant de δ.

Il nous reste à démontrer la proposition 2.4, que nous avons utilisée plus haut :
Preuve de la proposition 2.4: Les inégalités de Young et Hölder permettent d'écrire

$$\begin{aligned}\|B(w,v)(t)\|_2 &= \|\int_0^t\frac{1}{(t-s)^{3/2}}G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)*(w(s)v(s))ds\|_2\\ &\leq \int_0^t\frac{1}{(t-s)^{3/2}}\|G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right)\|_1\|w(s)\|_\infty\|v(s)\|_2 ds\\ &\leq \|G\|_1\left(\sup_{t>0}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{t>0}\|v(t)\|_2\right)\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{t-s}\sqrt{s}}\,.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|B(w,v)(t)\|_{L^\infty([0,T],L^2)} &= \sup_{0<t<T}\|B(w,v)(t)\|_2\\ &\leq \|G\|_1\left(\sup_{0<t<T}\int_0^t\frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}}\right)\left(\sup_{0<t<T}\sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T}\|v(t)\|_2\right)\\ &\lesssim \|w\|_{X_T}\|v\|_{Y_T}\ ,\end{aligned}$$

où l'on note $a \lesssim b$ si $a \leq Cb$ pour une constante C. Il nous reste maintenant à obtenir une estimation de la norme du gradient de B ; pour ce faire, nous décomposons cette fonctionnelle en une somme de deux termes :

$$\begin{aligned} B(w,v)(t) &= \int_0^{t/2} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds + \int_{t/2}^{t} e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(w(s)\otimes v(s))ds \\ &= B_1(w,v)(t) + B_2(w,v)(t) \end{aligned}$$

Et nous écrivons $\nabla B(w,v) = \nabla B_1(w,v) + B_2(\nabla w, v) + B_2(w, \nabla v)$. Il vient alors, en utilisant les inégalités de Young et Hölder :

$$\begin{aligned} \|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 &= \| \int_0^{t/2} \frac{1}{(t-s)^2} G\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (w(s)v(s))ds\|_2 \\ &\lesssim \int_0^{t/2} \frac{ds}{(t-s)\sqrt{s}} \left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T} \|v(t)\|_2\right) \end{aligned}$$

Soit :

$$\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla B_1(w,v)(t)\|_2 \lesssim \|w\|_{X_T}\|v\|_{Y_T} \ .$$

En utilisant encore une fois la même majoration, on montre enfin :

$$\begin{aligned} \sup_{0<t<T} \|B_2(\nabla w, v)(t)\|_2 &\lesssim \sup_{0<t<T} \int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s\sqrt{t-s}} \left(\sup_{0<t<T} t\|\nabla w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T} \|v(t)\|_2\right) \\ &\lesssim \|w\|_{X_T}\|v\|_{Y_T} \\ \sup_{0<t<T} \|B_2(w, \nabla v)(t)\|_2 &\lesssim \sup_{0<t<T} \int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s\sqrt{t-s}} \left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|w(t)\|_\infty\right)\left(\sup_{0<t<T} \sqrt{t}\|\nabla v(t)\|_2\right) \\ &\lesssim \|w\|_{X_T}\|v\|_{Y_T} \ . \end{aligned}$$

Il apparaît maintenant pourquoi nous avons dû décomposer B sous la forme $B = B_1 + B_2$. les formules ci-dessus comprennent en effet des intégrales (comme $\int_{t/2}^{t} \frac{ds}{s\sqrt{t-s}}$) qui ne convergeraient pas si le domaine d'intégration était $[0,t]$. ■

2.3 Preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$

Cette section est consacrée à la preuve de la partie "unicité" du théorème 4.

Montrons d'abord que deux solutions dans $\mathcal{E}$ de même condition initiale sont égales. Soient donc u, $\tilde{u}$ deux solutions de (NS) issues de u_0 et appartenant à $\mathcal{E}$. Soit

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \,,\, u(t) \neq \tilde{u}(t)\} \ .$$

Supposons par l'absurde $\tau < \infty$. Il découle alors du lemme suivant que $u(\tau) = \tilde{u}(\tau)$.

Lemme 2.6 *Soit u une solution de (NS) telle que $u_0 \in \partial BMO$ et $\|u\|_{\mathcal{C},T}$ soit fini. Alors u est faiblement continue sur $[0,T]$, c'est à dire que si $\phi \in \mathcal{S}$,* $\operatorname{div}\phi = 0$

$$< f(t), \phi > \underset{t\to\tau}{\longrightarrow} < f(\tau), \phi > \ .$$

Preuve : Soit $\phi \in \mathcal{S}$ et u comme dans l'énoncé. Puisque u est solution de (NS), elle s'écrit

$$u = e^{t\Delta} u_0 - B(u,u)\ .$$

La continuité faible de $e^{t\Delta}u_0$ est claire. Examinons maintenant $B(u,u)$.

$$(13) \qquad < B(u,u), \phi >=< \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \nabla u(s)^2 ds, \phi >= \int_0^t < u(s)^2, e^{(t-s)\Delta} \nabla \phi > ds\ .$$

Comme $\|u\|_{\mathcal{C},T} < \infty$, u vérifie, pour une constante C indépendante de $x \in \mathbb{R}^n$,

$$(14) \qquad \int_0^T \fint_{B(x,\sqrt{T})} u(x,t)^2 dx dt \leq C\ .$$

Comme ϕ a une très forte décroissance spatiale, la dernière intégrale de (13) converge bien. Assurons nous maintenant de la continuité faible de $B(u,u)$, en considérant

$$B(u,u)(t) - B(u,u)(t')\ ,$$

avec $t' < t$.

$$\begin{aligned} &< B(u,u)(t), \phi > - < B(u,u)(t'), \phi >= \\ &\qquad \int_{t'}^t < u(s)^2, e^{(t-s)\Delta} \nabla \phi > ds + \int_0^{t'} < u(s)^2, (e^{(t-t')\Delta} - I) e^{(t'-s)\Delta} \phi > ds \end{aligned}$$

En utilisant comme plus haut que u vérifie la majoration (14) et que $\phi \in \mathcal{S}$, on voit que le deuxième membre de cette dernière égalité tend vers 0 si $t' \to t$, ce qui prouve le lemme. ■

Ainsi $u(\tau) = \tilde{u}(\tau)$; on en déduit en utilisant la proposition 1.2 que $u = \tilde{u}$ au voisinage de τ ; on contredit ainsi la définition de τ.

Il nous faut maintenant montrer que les solutions que nous construisons sont effectivement dans $\mathcal{E}$. Nous considérons $u = w + v$ une solution construite comme dans le paragraphe précédent.
Les fonctions w et v vérifient chacune la condition (i) de la définition de $\mathcal{E}$, donc leur somme u aussi.
Reste la condition (ii). Elle est clairement vérifiée par w, puisque sa norme dans X_∞ est majorée par $C\epsilon$, et on prend le paramètre ϵ assez petit. Pour montrer que v satisfait aussi cette condition, nous nous plaçons en $\tau > 0$ (le cas $\tau = 0$ est clair) et nous allons voir que pour un certain $\delta > 0$, $v(\tau + \cdot) \in \mathcal{E}_\delta$. Pour plus de simplicité dans les notations, nous écrirons dans la suite $\tau = 0$. L'équation suivante est satisfaite par v :

$$(15) \qquad v = e^{t\Delta} v_0 - B(v,v) - B(w,v) - B(v,w)\ .$$

(noter que v est fortement continue à valeurs dans L^2, donc $v(\tau) = v_0$ est bien définie). En résolvant cette équation par point fixe dans X_T, on obtient une solution $v^\star \in X_T$ pour T assez petit et telle que

$$\|v^\star\|_{X_T} \lesssim \|e^{t\Delta} v_0\|_{X_T} \underset{T \to 0}{\longrightarrow} 0$$

car $v_0 \in L^2 \subset \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$. Il suffit maintenant de voir que $v^\star = v$ au voisinage de 0. Ce sera possible grâce à un argument de propagation de régularité qui découlera du

Lemme 2.7 *Pour $T > 0$ les applications suivantes sont continues :*

$$B : L^4([0,T], L^4) \times L^4([0,T], L^4) \longrightarrow L^4([0,T], L^4)$$
$$B : X_T \times L^4([0,T], L^4) \longrightarrow L^4([0,T], L^4)\ .$$

Preuve : Il est bien connu (voir par exemple [7]) que B est bicontinu sur $L^p L^q$ dès que $\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{q} = 1$, ce qui est le cas ici. Il reste donc seulement à prouver la seconde assertion du lemme.

$$\begin{aligned} \|B(u,v)\|_4 &\lesssim \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|G\|_1 \|u\|_\infty \|v\|_4 \, ds \\ &\lesssim \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} \|v\|_4 ds \|u\|_{X_T}\ . \end{aligned}$$

Or si $t \mapsto \|v(t)\|_4 \in L^4$, les lois de produit entre espaces de Lorentz impliquent que

$$\frac{1}{\sqrt{s}} \|v(s)\|_4 \in L^{4/3,4}$$

puis que $\displaystyle\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}\sqrt{t-s}} \|v\|_4 \, ds \in L^4$. Autrement dit,

$$\|B(u,v)\|_4 \lesssim \|v\|_{L^4 L^4} \|u\|_{X_T}\ .$$

■

Par propagation de régularité (lemme 5.1), $v^\star \in L^4([0,T], L^4)$. D'autre part, v est pour T fini dans $L^\infty([0,T], L^2) \cap L^2([0,T], \dot{H}^1)$, donc dans $L^4([0,T], L^4)$. On revient maintenant à l'équation (15), que l'on résoud par point fixe dans $L^4([0,T], L^4)$; pour T assez petit, on a unicité des solutions de norme petite ; on en déduit que $v^\star = v$ au voisinage de 0, ce qui conclut la preuve de l'unicité dans $\mathcal{E}$.

On peut maintenant montrer que pour $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, la solution u (unique dans $\mathcal{E}$) de (NS) est à valeurs dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$.
Pour ce faire, soient deux suites (w_0^δ) et (v_0^δ) telles que

$$(16) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \|w_0^\delta\|_{\partial BMO} \le \delta \\ v_0^\delta \in \mathcal{S} \\ w_0^\delta + v_0^\delta = u_0 \end{array} \right.$$

et on applique le schéma de construction de solutions du paragraphe précédent à la décomposition $u_0 = w_0^\delta + v_0^\delta$ pour obtenir

$$u = w^\delta + v^\delta$$

où v est localement bornée dans L^2 et $\|w\|_{\partial BMO} \le C\delta$. On conclut en laissant δ tendre vers 0.

2.4 Ajout d'une force extérieure

Nous nous intéressons maintenant au système (NSF). Il admet lui aussi une formulation intégrale, sous la forme

$$u(t) = e^{t\Delta}u_0 - \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla(u(s)\otimes u(s))ds + \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla V(s)\, ds$$

Que doit-on imposer sur V pour que les résultats obtenus en l'absence de force extérieure soient toujours valides ?

- Si l'on se place dans le cadre des solutions d'énergie finie ($u_0 \in L^2$), il suffit que $V \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2)$ pour garantir l'existence d'une solution.

- Si maintenant l'on considère le cas $u_0 \in \partial BMO$, on peut, comme dans [4], examiner quelles sont les conditions sur V pour que la méthode de point fixe s'applique encore et donne une solution globale de (NSF) pour une donnée initiale assez petite. En reprenant les estimations de [6] sur $\|B(u,v)\|_{X_T}$, il apparaît que

$$\left\| \int_0^t e^{(t-s)\Delta}\mathbb{P}\nabla V(s)\, ds \right\|_{X_\infty} \leq \|V\|_Z$$

  où $\|V\|_Z$ est donné par

$$\|V\|_Z \overset{\text{déf}}{=} \sup_{x,R} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |V(y,t)|dydt + \sup_{t>0} t\|V(t)\|_\infty + \sup_{t>0} t^{3/2}\|\nabla V(t)\|_\infty \ .$$

  Ainsi si $\|V\|_Z$ et $\|u_0\|_{\partial BMO}$ sont assez petits, la méthode de point fixe permet d'obtenir une solution globale dans X_∞ de (NSF).

Les deux observations qui viennent d'être faites conduisent au théorème suivant :

Théorème 5 *Soit $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que, si*

$$V = V_v + V_w \ \textit{avec} \ \|V_w\|_Z < \epsilon \ \textit{et} \ V_v \in L^2(\mathbb{R}^+, L^2) \ ,$$

le système (NSF) admette une solution globale à valeurs dans ∂BMO issue de u_0. De plus, pout tout δ strictement positif, il existe une constante $C(\delta)$, dépendant de u_0, V et δ, telle que

$$\forall t > 0 \quad \|v(t)\|_{\partial BMO} \leq C(\delta)(1 + t^\delta)\, .$$

3 Espaces de Besov, ∂BMO et $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$

3.1 Espaces de Besov

Une fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est dans l'espace de Besov $\dot{B}^s_{p,q}$ si et seulement si :

$$\|f\|_{\dot{B}^s_{p,q}} = \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{js}\|\Delta_j f\|_{L^p})^q \right)^{1/q} < \infty \ ,$$

où les Δ_j sont les blocs dyadiques associés à une décomposition de Littlewood-Paley homogène :

$$\begin{gathered}\Phi \in \mathcal{S} \\ \mathrm{Supp}(\hat{\Phi}) \subset \mathcal{C}(0, 3/4, 8/3) \\ \Delta_j = \hat{\Phi}(2^{-j}D) \\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j = Id \text{ dans } \mathcal{S}' \ .\end{gathered}$$

On pourra trouver une présentation exhaustive des espaces de Besov dans [15].

3.2 L'espace ∂BMO

La référence majeure pour BMO est le livre de Stein [14]. Suivant en cela Koch et Tataru, nous adoptons la définition suivante pour BMO : f appartient à BMO si et seulement si :

$$\sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |\nabla e^{t\Delta} f(x)|^2 dx dt < \infty.$$

(où l'on note $\fint_{B(x,R)} = \frac{1}{|B(x,R)|} \int_{B(x,R)}$). Il est à noter ([14], [6]) que cette définition ne coïncide pas entièrement avec la définition "classique" de BMO, selon laquelle f appartient à BMO si et seulement si :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d, R<\rho} \fint_{B(x,R)} \left| f(y) - \fint_{B(x,R)} f \right| dy \ < \ +\infty.$$

Du moins les fonctions qui vérifient la condition ci-dessus sont-elles dans l'espace BMO tel que nous l'avons défini.

On peut maintenant définir ∂BMO, l'espace des fonctions dérivées de fonctions de BMO. Plus précisément, on dira que $f \in \partial BMO(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si il existe des fonctions de $BMO(\mathbb{R}^n)$ $f_1, \dots, f_n$ telles que :

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} f_i \, .$$

On peut montrer ([11]) que cette définition est équivalente au fait que f vérifie :

$$\sup_{R>0, x\in\mathbb{R}^2} \int_0^{R^2} \fint_{B(x,R)} |e^{t\Delta} f(x)|^2 dx dt < \infty \ . \tag{17}$$

Cette dernière formule définit une norme sur ∂BMO ; nous la noterons $\|\cdot\|_{\partial BMO}$. Muni de cette norme, ∂BMO est un espace complet.
Pour finir, notons le lemme suivant :

Lemme 3.1 *Il existe $C > 0$ tel que, si $f \in \partial BMO$ et $t > 0$:*

$$\|e^{t\Delta} u\|_{\partial BMO} \leq \|u\|_{\partial BMO} \ .$$

3.3 Données initiales permettant d'appliquer le théorème

Le théorème (4) est énoncé pour $u_0 \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, mais la preuve donnée plus haut en dit un peu plus. Elle repose en effet sur un découpage de la condition initiale en une partie régulière et une partie dans ∂BMO de norme $< \epsilon$. On en déduit facilement qu'il existe ϵ tel que la même méthode s'applique pour $u_0 \in \partial BMO$ tel que :

$$d(u_0, \mathcal{S}) = \inf_{f \in \mathcal{S}} \|f - u_0\|_{\partial BMO} < \epsilon \, .$$

Pour ϵ assez petit, les conclusions du théorème 4 restent donc inchangées, à ceci près que la solution construite n'est plus à valeurs dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$.

3.4 L'espace $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$

Soit VMO (pour *Vanishing Mean Oscillations*) l'espace défini par :

$$(18) \qquad f \in VMO \Leftrightarrow \begin{cases} f \in BMO \\ \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d, R < \rho} \displaystyle⨍_{B(x,R)} \left| f(y) - ⨍_{B(x,R)} f \right| dy \underset{\rho \to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d, R > \rho} \displaystyle⨍_{B(x,R)} \left| f(y) - ⨍_{B(x,R)} f \right| dy \underset{\rho \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

On trouve dans [14] le résultat suivant :

Proposition 3.2 *VMO est l'adhérence de $\mathcal{S}$ dans BMO.*

Nous notons maintenant ∂_i pour $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et ∂X pour l'ensemble des dérivées de fonctions de l'espace X (au sens de (3.2)). La proposition suivante va nous permettre de mieux appréhender l'espace $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$:

Proposition 3.3 *On a :*

$$\partial VMO \subset \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$$

Preuve de la proposition : Soit $f \in VMO = \overline{\mathcal{S}}^{BMO}$, montrons que $\partial_i f \in \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$. Soit donc (ϕ_n) une suite de $\mathcal{S}$ telle que

$$\phi_n \overset{BMO}{\longrightarrow} f$$

Alors, comme $\| \cdot \|_{BMO} \geq \|\partial_i \cdot \|_{\partial BMO}$, on a aussi :

$$\partial_i \phi_n \overset{\partial BMO}{\longrightarrow} \partial_i f$$

On en déduit donc que :

$$\partial_i \overline{\mathcal{S}}^{BMO} \subset \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO},$$

d'où le résultat. ■

Soulignons enfin le phénomène suivant: nous venons de voir que les fonctions de BMO qui sont dans l'adhérence de $\mathcal{S}$ sont plus régulières et ont une meilleure décroissance à l'infini que les autres fonctions de BMO. Ceci est exprimé par les conditions dans (18) lorsque $\rho \to 0$ ou $\rho \to \infty$.

Pour $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, on observe aussi ce double effet de régularisation locale et de décroissance plus forte à l'infini. Ainsi, on vérifiera facilement, en une dimension, que $x \mapsto \sin(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{|x|}$ appartiennent à $\partial BMO \setminus \overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, la première fonction ne présentant pas de décroissance à l'infini et la seconde ayant une trop forte discontinuité en 0.

4 Conclusion

Pour conclure, il est intéressant de récapituler les résultats dont nous disposons pour l'équation (NS), suivant u_0 :

- Si u_0 est dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$, il existe une solution u, à valeurs dans $\overline{\mathcal{S}}^{\partial BMO}$ telle que
$$\|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C(u_0)(1+\sqrt{t}) .$$
- Si u_0 est dans ∂BMO avec $\|u_0\|_{\partial BMO} < \epsilon$, il existe une solution u, à valeurs dans ∂BMO, et telle que
$$\|u(t)\|_{\partial BMO} \leq C\|u_0\|_{\partial BMO} .$$
- Dans le cas général $u_0 \in \partial BMO$, on ne sait rien sur l'existence d'une solution.

5 Annexe : résultats de type point fixe

Nous utilisons dans cet article un théorème de point fixe et un lemme de propagation de régularité. Ils sont rappelés ici (on pourra se reporter à [9]) :

Théorème 6 (Existence et unicité) *Soit X un espace de Banach, L un opérateur linéaire sur X de norme $\lambda < 1$, et B un opérateur bilinéaire tel que :*
$$\|B(x,y)\|_X \leq \gamma\|x\|_X\|y\|_X$$
Alors pour tout $y \in X$ tel que
$$4\gamma\|y\|_X < (1-\lambda)^2$$
la suite définie par :
$$\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_{n+1} = y + LX_n + B(X_n, X_n) \end{cases}$$
converge dans X vers l'unique solution de
$$x = y + Lx + B(x,x)$$
telle que
$$2\gamma\|x\|_X < (1-\lambda)$$
De plus, on a l'estimation suivante :
$$\|x\|_X \lesssim \|y\|_X$$

Lemme 5.1 (Propagation de régularité) *Soient x, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, λ et γ comme dans le théorème précédent. On suppose de plus que y est dans un espace de Banach Y, que L est un opérateur linéaire sur Y de norme μ et que*
$$\|B(f,g)\|_Y < \kappa\|f\|_X\|g\|_Y$$
$$\|B(g,f)\|_Y < \kappa\|f\|_X\|g\|_Y .$$
On suppose enfin que $\mu < 1$ et que $\kappa(1-\lambda) < (1-\mu)\gamma$. Alors X_n converge vers x dans Y et
$$\|x\|_Y \lesssim \|y\|_Y$$

References

[1] P. Auscher, S. Dubois, P. Tchamitchian, On the stability of global solutions to Navier-Stokes equations in the space, *Journal de mathématiques pures et appliquées, à paraître.*

[2] C. Calderón, Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p, *Transactions of the American Mathematical Society* ***318****, 179-200, 1990.*

[3] M. Cannone, Ondelettes, paraproduit et Navier-Stokes, *Diderot Editeur, Paris, 1995.*

[4] M. Cannone, F. Planchon, On the non-stationnary Navier-Stokes equations with an external force, *Revista Matematica Iberoamericana* ***16****, No.1, 1-16, 2000.*

[5] J. Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel, *Journal d'analyse mathématique* ***77****, 27-50, 1999.*

[6] S. Dubois, Thèse de doctorat : Equations de Navier-Stokes dans l'espace : Espaces critiques et solutions d'énergie finie, *Université de Picardie Jules Verne, 2002.*

[7] E. Fabes, B. Jones, N. Riviere, The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p, *Archives for Rational and Mechanical Analysis* ***45*** *(1972) 222-240.*

[8] I. Gallagher, F. Planchon, On global infinite energy solutions to the Navier-Stokes equations, *Archives of Rational and Mechanical Analysis* ***161****, No.4, 307-337, 2002.*

[9] I. Gallagher, D. Iftimie, F. Planchon, Comportement asymptotique et stabilité des solutions globales des équations de Navier-Stokes, *Annales de l'Institut Fourier* ***53****, 1387-1424, 2003.*

[10] Y. Giga, S. Matsui, O. Sawada, Global existence of two-dimensional Navier-Stokes flow with nondecaying initial velocity, *Journal of mathematical fluid mechanics* ***3****, 302-315, 2001.*

[11] H. Koch, D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations, *Advances in Mathematics* ***157****, 22-35, 2001.*

[12] P.-G. Lemarié-Rieusset, Recent developments in the Navier-Stokes problem, *Chapman-Hall, 2003.*

[13] J. Leray, Sur le mouvement d'un fluide visqueux remplissant l'espace, *Acta Mathematica* ***63****, 193-248, 1934.*

[14] E. Stein, Harmonic analysis, *Princeton University press, 1993.*

[15] H. Triebel, Theory of function spaces II, *Birkhaüser Verlag, 1992.*